Universidade Federal Fluminense
Curso: Sistemas de Informação
Disciplina: Fundamentos Matemáticos para Computação
Professora: Raquel Bravo

Gabarito da Lista de Exercícios sobre Teorema Binomial

1. **Desenvolver as potências seguintes:**

   Observação: Nos ítens abaixo estaremos usando o Teorema Binomial: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$, onde a e b são reais e n natural.

   (a) $(\frac{x^3}{2}+1)^5$

   Resposta: Desenvolvendo:
   $(\frac{x^3}{2}+1)^5 = \sum_{i=0}^{5} C_5^i (\frac{x^3}{2})^{5-i} 1^i = \sum_{i=0}^{5} C_5^i \frac{x^{15-3i}}{2^{5-i}} =$
   $C_5^0 \frac{x^{15}}{2^5} + C_5^1 \frac{x^{12}}{2^4} + C_5^2 \frac{x^9}{2^3} + C_5^3 \frac{x^6}{2^2} + C_5^4 \frac{x^3}{2} + C_5^5 =$
   $\frac{x^{15}}{2^5} + 5\frac{x^{12}}{2^4} + 10\frac{x^9}{2^3} + 10\frac{x^6}{2^2} + 5\frac{x^3}{2} + 1 =$
   $\frac{1}{32}x^{15} + \frac{5}{16}x^{12} + \frac{5}{4}x^9 + \frac{5}{2}x^6 + \frac{5}{2}x^3 + 1.$

   (b) $(2y+3x)^4$

   Resposta: Desenvolvendo:
   $(2y+3x)^4 = \sum_{i=0}^{4} C_4^i (2y)^{4-i}(3x)^i = \sum_{i=0}^{4} \frac{4!}{i!(4-i)!} 2^{4-i} 3^i y^{4-i} x^i =$
   $16y^4 + 96y^3x + 216y^2x^2 + 216yx^3 + 81x^4.$

   (c) $(2a-3b)^3$

   Resposta: Desenvolvendo:
   $(2a-3b)^3 = \sum_{i=0}^{3} C_3^i (2a)^{3-i}(-3b)^i = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$

   (d) $(\frac{1}{y}-y)^6$

   Resposta: Desenvolvendo:
   $(\frac{1}{y}-y)^6 = \sum_{i=0}^{6} C_6^i (\frac{1}{y})^{6-i}(-y)^i = \sum_{i=0}^{6} \frac{6!}{i!(6-i)!}(-1)^i y^{2i-6}.$

2. Considerando $(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k$, calcule o sexto termo das potências abaixo:

   (a) $(\frac{a}{b} + \frac{b}{a^2})^{17}$

   Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
   $T_{k+1} = \binom{17}{k}(\frac{a}{b})^{17-k}(\frac{b}{a^2})^k$, $k = 0, 1, \ldots, 17$.
   Como queremos o sexto termo, teremos no nosso caso $k = 5$, isto é: $T_6 = \binom{17}{5}(\frac{a}{b})^{17-5}(\frac{b}{a^2})^5 = \frac{17!}{5!12!}\frac{a^{12}}{b^{12}}\frac{b^5}{a^{10}} = \frac{17!}{5!12!}\frac{a^2}{b^7}$.

   (b) $(1 - \frac{1}{b})^7$

   Resposta: $T_6 = \binom{7}{5}(1)^{7-5}(-\frac{1}{b})^5 = -\frac{7!}{5!2!}\frac{1}{b^5} = -\frac{21}{b^5}$.

   (c) $(3x^2y - \frac{1}{3})^9$

   Resposta: $T_6 = -\frac{9!}{5!4!}\frac{1}{3}x^8y^4 = -42x^8y^4$.

   (d) $(2x^3 - \frac{3}{x^2})^{12}$

   Resposta: $T_6 = -\frac{12}{5!7!}2^7 3^5 x^{11}$.

3. Calcular a soma dos coeficientes de todos os termos do desenvolvimento de $(x^3 - \frac{1}{2x})^{12}$.

   Resposta: Sabemos que em um polinômio em x :
   $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ temos
   $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$,
   ou seja, a soma dos coeficientes de um polinômio em x é o valor numérico do polinômio para $x = 1$.
   Logo para $P(x) = (x^3 - \frac{1}{2x})^{12}$, a soma dos seus coeficientes é dada por $P(1) = (1^3 - \frac{1}{2.1})^{12} = (\frac{1}{2})^{12}$.

4. Calcular o termo independente de x nas potências seguintes:

   (a) $(x^2 + \frac{1}{x^2})^6$
   Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
   $T_{k+1} = \binom{6}{k}(x^2)^{6-k}(\frac{1}{x^2})^k = \binom{6}{k}x^{12-4k}$
   Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $12 - 4k = 0$, logo $k = 3$.
   Então o termo independente de x é: $T_4 = \binom{6}{3}x^0 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

(b) $(x^2 + \frac{1}{x})^9$

Resposta: o termo independente de x é: $T_7 = \frac{9!}{6!3!} = 84$.

(c) $(x^2 + \frac{1}{x^2})^8(x^2 - \frac{1}{x^2})^8$

Resposta: Sabemos que $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
Reescrevendo:
$(x^2 + \frac{1}{x^2})^8(x^2 - \frac{1}{x^2})^8 = [(x^2 + \frac{1}{x^2})(x^2 - \frac{1}{x^2})]^8 = (x^4 - \frac{1}{x^4})^8$
O termo genérico do desenvolvimento é então dado por:
$T_{k+1} = \binom{8}{k}(x^4)^{8-k}(-\frac{1}{x^4})^k = \binom{8}{k}(x^{32-4k}(-1)^k\frac{1}{x^{4k}} = \binom{8}{k}(-1)^k x^{32-8k}$
Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $32 - 8k = 0$, logo $k = 4$.
Então o termo independente de x é: $T_5 = \binom{8}{5}(-1)^4 == \frac{8!}{5!3!} = 56$.

5. Prove, a partir do binômio de Newton, que para $n \geq 2$ temos $(1 + \frac{1}{n})^n > 2$

Resposta: Temos pelo binômio de Newton que:

$(1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{(n-k)}(\frac{1}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$
Como $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1}\frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1$ e $\binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} > 0$
Então segue que $(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} > 2$.

6. Explicar porque não existe termo independente de x no desenvolvimento de $(x + \frac{1}{x})^{2n+1}$.

Resposta: O termo genérico do desenvolvimento é dado por:
$T_{k+1} = \binom{2n+1}{k}(x^{2n+1-k})(\frac{1}{x})^k = \binom{2n+1}{k}x^{2n+1-2k}$
Para o termo ser independente de x o expoente de x deve ser zero, ou seja, $2n + 1 - 2k = 0$. Mas isso implica em que $2k = 2n + 1$. Isso é impossível: não podemos ter um número par igual a um número ímpar.

7. Calcule 11^{14} usando o Teorema Binomial.

Resposta: Usando o Teorema Binomial temos:
$11^{14} = (1 + 10)^{14} = \sum_{k=0}^{14} C_{14}^k 1^{14-k}10^k = C_{14}^0 10^0 + C_{14}^1 10^1 + C_{14}^2 10^2 + \ldots + C_{14}^{14} 10^{14}$.

8. Mostre que:
$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Resposta: Basta fazermos $a = b = 1$ na fórmula do binômio de Newton:
$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$,
ou seja:
$2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$.